Gustavo Madeira

Observatório Nacional

madeira@on.br

Conteúdo

Capítulo 1

O problema de 2 corpos

O Problema de Dois Corpos trata da interação gravitacional entre dois corpos massivos isolados no espaço, de acordo com a lei da gravitação universal de Newton. É o caso mais simples e fundamental da Dinâmica Orbital, servindo como base para a compreensão do movimento de corpos celestes. Sua solução permite obter as equações das órbitas descritas por cada um dos corpos em torno do centro de massa do sistema, bem como os elementos orbitais que determinam o formato e a orientação dessas órbitas no espaço. É também o único caso de sistema gravitacional com solução puramente analítica, o que reforça sua importância conceitual. Já o Problema de Três Corpos, discutido no Capítulo , admite soluções analíticas apenas em casos especiais. Situações mais gerais, envolvendo três ou mais corpos em interação gravitacional, requerem abordagens semi-analíticas ou totalmente numéricas.

Como suposição simplificadora, os dois corpos são assumidos como *pontos de massa*, com massas m_1 e m_2. Um ponto de massa corresponde a um corpo material idealizado cuja massa está concentrada em um único ponto do espaço – ou seja, trata-se de um objeto sem dimensão física. Nessa condição, aplica-se a Lei da Gravitação Universal de Newton, segundo a qual a força gravitacional $\vec{F}$ entre os corpos é dada por:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \tag{1.1}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor-posição do corpo de massa m_2 em relação ao corpo de massa m_1, e G é a constante gravitacional universal, com valor $G = 6.6743 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$.

Assumindo-se um sistema de coordenadas inercial arbitrário ABC (Figura 1.1), as forças e acelerações sofridas por cada uma das massas – determinadas pela Segunda Lei de Newton – são dadas por:

$$\vec{F}_1 = m_1\ddot{\vec{r}}_1 = +G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \quad \vec{F}_2 = m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \tag{1.2}$$

onde $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são as forças atuando sobre m_1 e m_2, respectivamente. Os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ representam as posições dessas massas em relação à origem do sistema de coordenadas, enquanto o vetor relativo $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ aponta de m_1 para m_2. O ponto sobre um vetor (por exemplo, $\dot{\vec{r}}_1$) indica derivada temporal: $\dot{\vec{r}}_1$ representa a velocidade de m_1 e $\ddot{\vec{r}}_1$ sua aceleração.

Uma vez que o sistema considerado é fechado, ou seja, não está sujeito à ação de forças externas, a soma das forças que atuam sobre as massas deve ser nula. Assim, pela Segunda Lei de Newton,

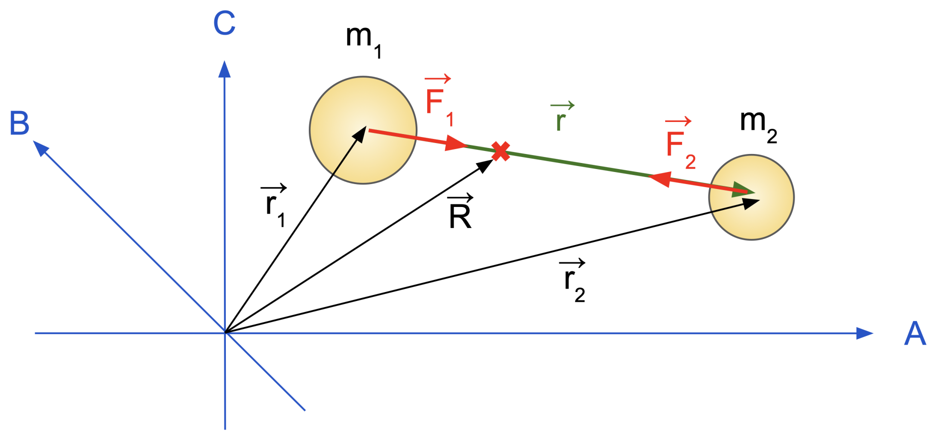

Figura 1.1: Representação do problema de dois corpos em um sistema de coordenadas inercial arbitrário ABC (em azul). Os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ indicam as posições das massas m_1 e m_2, respectivamente, em relação à origem do sistema. O vetor $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ representa a posição relativa de m_2 em relação a m_1. O ponto marcado com um "X" indica o centro de massa do sistema, com vetor posição $\vec{R}$. As forças gravitacionais atuando sobre os corpos estão indicadas pelos vetores $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ (em vermelho), de mesma intensidade e direções opostas.

tem-se:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0}. \tag{1.3}$$

Sendo o vetor-posição do centro de massa definido por:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{1.4}$$

segue da equação (1.3) que a aceleração do centro de massa é nula, ou seja, $\ddot{\vec{R}} = \vec{0}$.

Esse resultado implica que o centro de massa do sistema encontra-se em inércia, movendo-se com velocidade constante (ou permanecendo em repouso). Isso motiva uma abordagem conveniente para o problema: a mudança para um sistema de coordenadas inercial centrado no centro de massa. Essa reformulação geral será apresentada na Seção **??**. Por ora, adotaremos uma hipótese simplificadora: assumiremos que $m_1 \gg m_2$ – hipótese válida, por exemplo, para o sistema Sol-Terra – de modo que $\vec{R} \approx \vec{r}_1$. Assim, podemos estudar o movimento do corpo secundário (menos massivo, m_2) em um sistema de coordenadas centrado no corpo primário (mais massivo, m_1).

1.1. Movimento de um secundário ao redor de um primário massivo

1.1.1. Lei das Áreas

Seja um sistema de coordenadas xyz centrado no primário m_1. Nesse referencial, o vetor-aceleração do secundário m_2 pode ser expresso por:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -G\frac{(m_1 + m_2)}{r^3}\vec{r}. \tag{1.5}$$

Definindo a constante gravitacional reduzida como $\mu = G(m_1 + m_2)$, obtemos a equação do movimento relativo:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = \vec{0}, \tag{1.6}$$

a qual corresponde a uma equação vetorial diferencial de segunda ordem. Resolver essa equação equivale a determinar as posições e velocidades do secundário ao longo do tempo, a partir de sua posição e velocidade iniciais.

Como a equação (1.6) é de segunda ordem, sua solução envolve a determinação de duas constantes integrais por dimensão espacial – totalizando seis constantes do movimento. Assim, uma estratégia útil para a resolução do problema consiste em manipular a equação (1.6) de forma a determinar tais constantes, as quais caracterizarão completamente a órbita do secundário.

A primeira dessas constantes pode ser determinada notando-se que o vetor aceleração é proporcional ao vetor posição, o que implica que o produto vetorial entre eles corresponde ao vetor-nulo ($\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$). Integrando essa relação no tempo, obtém-se:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}, \tag{1.7}$$

onde $\vec{h}$ é uma constante vetorial que pode ser reconhecida como o momento angular específico do sistema, ou seja, o momento angular por unidade de massa. O fato de o momento angular ser uma grandeza conservada é esperado, uma vez que não há forças externas atuando sobre o sistema.

A equação (1.7) explicita que os vetores $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$ são ambos perpendiculares a $\vec{h}$. Tal fato implica que o movimento ocorre em um plano definido por $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$, o qual é ortogonal ao vetor momento angular. Em outras palavras, o movimento da massa m_2 ao redor de m_1 permanece restrito a um plano fixo, denominado plano orbital. Essa propriedade permite reduzir um grau de liberdade espacial do sistema, restringindo a análise ao plano de movimento.

Assumindo um sistema de coordenadas polares no plano orbital (Figura 1.2), tem-se que os vetores posição, velocidade e aceleração podem ser escritos, respectivamente, como:

$$\vec{r} = r\,\hat{r}, \tag{1.8}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}, \tag{1.9}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{\theta}, \tag{1.10}$$

onde θ representa o ângulo entre a posição do corpo m_2 e uma direção de referência fixa no plano orbital.

Substituindo os vetores posição e velocidade em coordenadas polares (Equações 1.8 e 1.9) na Equação 1.7, é possível determinar o momento angular do sistema, encontrando-se:

$$\vec{h} = h\hat{z} = r^2\dot{\theta}\hat{z}, \tag{1.11}$$

onde $\hat{z}$ é o vetor unitário perpendicular ao plano orbital.

Como o momento angular do sistema é uma constante, a Equação 1.11 permite relacionar a frequência angular da massa m_2 com sua posição instantânea, ambas grandezas dependentes do tempo. Para explorar essa relação, será avaliada a área varrida pelo secundário durante um intervalo de tempo δt. No instante $t = 0$, o secundário encontra-se na posição $\vec{r}(t = 0) = r\hat{r} + \theta\hat{\theta}$, enquanto no instante $t = \delta t$, sua posição é $\vec{r}(t = \delta t) = (r + \delta r)\hat{r} + (\theta + \delta\theta)\hat{\theta}$. Assim, a área varrida δA é dada por (Figura 1.2):

$$\delta A = \frac{1}{2} r(r + \delta r)\sin\delta\theta. \tag{1.12}$$

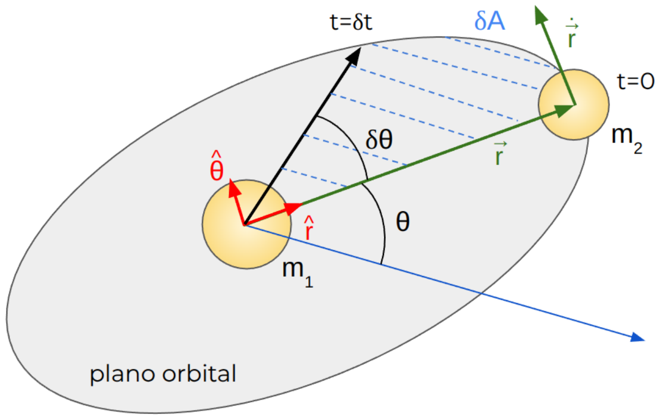

Figura 1.2: Representação do movimento do corpo secundário m_2 ao redor do primário m_1 no plano orbital. Os vetores unitários $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ definem a base polar associada à posição instantânea de m_2 no instante $t = 0$, enquanto $\vec{r}$ é o vetor posição e $\vec{v}$, a velocidade. O ângulo θ é medido a partir de uma direção de referência fixa arbitrária. Em um intervalo de tempo δt, o corpo varre uma área δA, representada pela região hachurada. O vetor momento angular do sistema é constante e perpendicular ao plano orbital, apontando para fora do plano da figura.

Assumindo o limite $\delta t \to 0$ (de modo que $\delta r \to 0$ e $\sin\delta\theta \to \delta\theta$), a taxa de variação da área será dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2}. \tag{1.13}$$

Como o momento angular é constante, a área varrida pelo secundário é proporcional ao tempo ($A = \frac{h}{2}t + \text{constante}$). Em outras palavras, o secundário varre áreas iguais em tempos iguais. Isso significa que, ao longo de uma mesma órbita, o secundário move-se mais rapidamente quando está próximo do primário e mais lentamente quando está mais afastado. Essa lei é conhecida como a *Lei das Áreas* ou *Segunda Lei de Kepler*, em homenagem ao astrônomo alemão Johannes Kepler, que a formulou empiricamente ao estudar as posições dos planetas nas tabelas astronômicas obtidas por Tycho Brahe.

1.1.2. Lei das Órbitas

Agora, substituindo os vetores posição e aceleração em coordenadas polares (Equações 1.8 e 1.10) na Equação 1.6, encontra-se a equação planar do movimento relativo, dada por:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0. \tag{1.14}$$

Tal equação é classificada como uma equação de Bernoulli e pode ser resolvida por meio da mudança de variável $r = u^{-1}$. Derivando r em relação ao tempo:

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -h\frac{du}{d\theta}, \tag{1.15}$$

onde foi utilizado o fato de que $\dot{\theta} = h/r^2 = hu^2$.

Derivando novamente no tempo:

$$\ddot{r} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}. \tag{1.16}$$

Tabela 1.1: Relação entre o tipo de órbita, a excentricidade e e o parâmetro de órbita p, sendo a o semi-eixo maior e q, a distância do pericentro.

Cônica	**Excentricidade**	**Parâmetro de órbita**
Circunferência	$e = 0$	$p = a$
Elipse	$0 < e < 1$	$p = a(1 - e^2)$
Parábola	$e = 1$	$p = 2q$
Hipérbole	$e > 1$	$p = a(e^2 - 1)$

Substituindo essas expressões na Equação 1.14, obtém-se:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \tag{1.17}$$

A solução homogênea dessa equação diferencial é dada por $u_h = \tilde{c}_1 \cos\theta + \tilde{c}_2 \sin\theta$, enquanto a solução particular é $u_p = \mu/h^2$. Assim, a solução geral pode ser escrita como:

$$u(\theta) = \frac{\mu}{h^2}(c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta + 1), \tag{1.18}$$

onde c_1 e c_2 são constantes do movimento.

Assumindo $c_1 = e\cos\varpi$ e $c_2 = e\sin\varpi$, e retornando à variável original $r = 1/u$, encontra-se:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varpi)}, \tag{1.19}$$

onde $p = h^2/\mu$ é o chamado parâmetro da órbita.

Como pode ser notado, a Equação 1.19 corresponde à equação geral das cônicas em coordenadas polares, o que implica que a órbita do secundário em torno do primário é uma seção cônica. Essa relação é conhecida como a *Lei das Órbitas*. As cônicas são figuras geométricas obtidas pela interseção entre um plano e um cone, resultando em quatro casos distintos: circunferência, elipse, parábola e hipérbole. Cada tipo é caracterizado por um intervalo distinto da excentricidade orbital e e por uma expressão específica do parâmetro orbital p, conforme mostrado na Tabela 1.1.

A circunferência e a elipse correspondem a órbitas fechadas – típicas dos planetas, satélites e asteroides –, enquanto a parábola e a hipérbole representam órbitas abertas, frequentemente associadas a cometas interestelares ou sondas espaciais em trajetórias de escape.

1.1.3. Lei dos Períodos